Relation between series representations of functions related to astroid-type closed curves and uniformly asymptotic evaluations of generalized Bessel functions

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
北島雅也 (Masaya KITAJIMA) *

概要

正の実数 p により円を一般化した閉曲線 p-circle 内部の格子点に対して, 各点と対応する単位正方形たちからなる図形の近似を通し, 面積間の誤差項 P_p を考える. 半径の増大に伴う P_p の漸近を調べる問題において, 我々は未だ着手されていない 1 以下の p の場合について取り組むため, 倉坪氏と中井氏による円 ($p = 2$) の問題についての研究手法に目を向けた. 本稿では, 手法において重要な役割を果たす級数等式の p に対する一般化を与え, 問題が一般化 Bessel 関数の諸性質, 特に一様漸近評価と結びつくことに触れ, この数論の問題と特殊関数論の繋がりを強調する.

1 導入

正の実数 p, r に対して, 円を一般化した図形である p-circle (Lamé's curve, あるいは supper ellipse として呼称される閉曲線) $\{x \in \mathbb{R}^2 |\ |x_1|^p + |x_2|^p = r^p\}$ の格子点問題について考える. すなわち, それは p-circle と (格子点中心の非交叉単位正方形からなる) モザイク状に近似された図形間における面積の誤差

$$P_p(r) := R_p(r) - \frac{2}{p}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p})}r^2$$

に対して, $P_p(r) = \mathcal{O}(r^{\alpha_p})$ かつ $P_p(r) = \Omega(r^{\alpha_p})$ を満たすような値 α_p を見つける問題である. ただし, R_p は p-circle 内部における格子点の個数 (近似モザイク図形の面積), gamma 関数 Γ からなる項は p-circle の面積であり, $\mathbb{R}$ 上の関数 f と g に対して $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ や $f(t) = \Omega(g(t))$ であるとは, それぞれ $\limsup_{t\to\infty} |\frac{f(t)}{g(t)}| < +\infty$ や $\liminf_{t\to\infty} |\frac{f(t)}{g(t)}| > 0$ であることを意味することに注意せよ.

特に $p = 2$ の場合 (すなわち, 閉曲線が円になる場合) では, いわゆる Gauss の円問題 [3] と呼ばれており, 1917 年に G.H. Hardy[5] が予想した, 十分小さな任意の $\varepsilon > 0$ で成り立つ $\mathcal{O}$ 評価の下限

$$P_2(r) = \mathcal{O}(r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad \neq \mathcal{O}(r^{\frac{1}{2}}) \tag{1.1}$$

について, $\frac{105}{824}(= 0.127\cdots)$ よりも大きな任意の ε に対して, 評価 (1.1) が成り立つことが 2017 年に J. Bourgain と N. Watt [1] により示されている.

* E-mail:kitajima.masaya.z5@s.mall.nagoya-u.ac.jp

一方で, $p>2$ の場合, E. Krätzel により一般化された Bessel 関数 ([8], Definition 3.3) を用いた級数展開で表される second main term $\Psi(r;p)$ ([8], (3.55)) で分解した表示 ([8], (3.57))

$$P_p(r)=\Psi(r;p)+\Delta(r;p) \tag{1.2}$$

から以下の重要な定理が与えられており, このとき, G. Kuba[9] による 1993 年の結果 (剰余項 $\Delta(r;p)$ の $\mathcal{O}$ 評価) を適用すれば, $p>\frac{73}{27}$ の場合の問題が解決する.

Theorem 1.1 ([8], Theorem 3.17 A)**.** $p>2$ としたとき, $\Delta(r;p)=\mathcal{O}(r^{\alpha_p})$ を満たす $\alpha_p<1-\frac{1}{p}$ が存在するならば, そのとき $P_p(r)=\mathcal{O}(r^{1-\frac{1}{p}}),\Omega(r^{1-\frac{1}{p}})$ が成り立つ.

ここで, 残された $0<p<2$ の場合について考える. $p\geq 2$ の場合における分解 (1.2) に基づいた従来の方法では, r を固定した $x_2>0$ に対する二階導関数 $x_2''(x_1)$ を扱うのだが, $0<p<2$ の場合ではこの導関数に特異点が現れてしまうため, 根本的に別の手法から問題に取り組む必要がある.

起点として, $p=2$ の場合の問題に対する, 倉坪氏と中井氏 [10] による調和解析的な取り組みと, それにおける極めて重要な等式 ([10], (2.6))

$$D_\beta(s:x)-\mathcal{D}_\beta(s:x)=s^{\beta+1}2^{\beta+1}\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\frac{J_{\beta+1}(2\pi\sqrt{s}|x-n|)}{(2\pi\sqrt{s}|x-n|)^{\beta+1}}\qquad(\beta>\frac{1}{2}) \tag{1.3}$$

について着目する. ただし, J_ν は Bessel 関数であり, $\beta>-1,\ s>0,\ x\in\mathbb{R}^2$ に対して,

$$D_\beta(s:x):=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{|m|^2<s}(s-|m|^2)^\beta e^{2\pi i x\cdot m},\quad \mathcal{D}_\beta(s:x):=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_{|\xi|^2<s}(s-|\xi|^2)^\beta e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi \tag{1.4}$$

として定められており, 特に $D_0(r^2:0)-\mathcal{D}_0(r^2:0)=P_2(r)$ が成り立つ. 倉坪氏と中井氏は, この Bessel 関数を用いた級数表示 (1.3) を用いて Hardy 予想 (1.1) と同値な調和解析的な主張を与えた (詳細は [10] の Theorem 7.1 を参照せよ).

そこで, 我々は 倉坪氏と中井氏の手法に倣い, (1.4) を p-norm $|\xi|_p(:=(|\xi_1|^p+|\xi_2|^p)^{\frac{1}{p}})$ により一般化した関数

$$D_\beta^{[p]}(s:x):=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{|m|_p^p<s}(s-|m|_p^p)^\beta e^{2\pi i x\cdot m},\quad \mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x):=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_{|\xi|_p^p<s}(s-|\xi|_p^p)^\beta e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi, \tag{1.5}$$

を調べることを通して, 特に先行研究において未着手な $\frac{2}{p}\in\mathbb{N}$ が奇数なる $0<p\leq 1$ に対応する「astroid 型」p-circle の問題を考え, 与えられた誤差項 P_p の評価式に対応する同値な調和解析的な主張 ([10] の Theorem 7.1 の一般化) を見出すことを将来的な目標とする.

本稿では, 論文 [10] において重要な役割を果たす等式 (1.3) の p に対する一般化を与え, その過程に定めた一般化 Bessel 関数の諸性質との結びつきについて強調する.

2 主定理

$\mathbb{R}^2$ 上の関数 F が球対称であるとは, 任意の $x\in\mathbb{R}^2$ で $F(x)=\phi(|x|)$ を満たす非負実数上の関数 ϕ が存在することをいい, このような関数 F が $\mathbb{R}^2$ 上で可積分であれば, その Fourier 変換が

$$\hat{F}(\xi) = 2\pi \int_0^\infty J_0(2\pi r|\xi|)\phi(r)rdr \quad (\xi \in \mathbb{R}^2) \tag{2.1}$$

のように零次 Bessel 関数 J_0 を用いた積分で表示できることを思い返す (零次の Hankel 変換; [2]).

このとき, 正の実数 p, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 F に対し, 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ で $F(x) = \phi(|x|_p)$ を満たす非負実数上の関数 ϕ が存在するとき, F は p-radial であると定める (すなわち, 球対称性の一般化).

すると, $\mathbb{R}^2$ 上で可積分かつ p-radial な関数 F の Fourier 変換を, 表示 (2.1) の対応物として

$$\hat{F}(\xi) = p\Gamma^2(\frac{1}{p}) \int_0^\infty J_0^{[p]}(2\pi r\xi)\phi(r)rdr \qquad (\xi \in \mathbb{R}^2) \tag{2.2}$$

のように表すことを通し ([6], (2.3)), 零次 Bessel 関数における p-radial に基づく一般化関数

$$J_0^{[p]}(x) := \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{p})}\left(\frac{2}{p}\right)^2 \int_0^1 \cos(x_1 t^{\frac{1}{p}})\cos(x_2(1-t)^{\frac{1}{p}})t^{\frac{1}{p}-1}(1-t)^{\frac{1}{p}-1}dt \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

を定義できる. 更に, Bessel 関数に関してよく知られている公式 ([11] の Lemma 4.13)

$$J_{\alpha+\beta+1}(t) = \frac{t^{\beta+1}}{2^\beta\Gamma(\beta+1)} \int_0^1 J_\alpha(ts)s^{\alpha+1}(1-s^2)^\beta ds \qquad (\alpha > -\frac{1}{2},\ \beta > -1,\ t > 0)$$

に倣い, $J_0^{[p]}$ を核とし正の次数を付加させることで, 非負実数次 Bessel 関数の一般化関数を次のように定める ([6], (2.4), Definition 2.5).

$$J_\omega^{[p]}(x) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{p})}\left(\frac{2}{p}\right)^2 \int_0^1 \cos(x_1 t^{\frac{1}{p}})\cos(x_2(1-t)^{\frac{1}{p}})t^{\frac{1}{p}-1}(1-t)^{\frac{1}{p}-1}dt & (\omega = 0), \\ \frac{|x|_p^\omega}{p^{\omega-1}\Gamma(\omega)} \int_0^1 J_0^{[p]}(\tau x)\tau(1-\tau^p)^{\omega-1}d\tau & (\omega > 0). \end{cases} \tag{2.3}$$

すると, 本稿の主結果として, (変数により) 一般化された p-circle 内格子点誤差関数 $D_\beta^{[p]} - \mathcal{D}_\beta^{[p]}$ に対する, 次のような級数展開が得られる (すなわち, 表示 (1.3) の p についての一般化).

Theorem 2.1 ([6], Theorem 1.3)**.** $p > 0$ に対して, $\mathcal{D}_\beta^{[p]}(1:x)$ が $\mathbb{R}^2$ 上可積分となる $\beta > -1$ の下で, 次が成り立つ.

$$D_\beta^{[p]}(s:x) - \mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x) = s^{\beta+\frac{2}{p}}p^{\beta+1}\Gamma^2(\frac{1}{p}) \sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{J_{\beta+1}^{[p]}(2\pi\sqrt[p]{s}(x-n))}{(2\pi\sqrt[p]{s}|x-n|_p)^{\beta+1}} \qquad (s > 0,\ x \in \mathbb{R}^2).$$

この定理の証明において, 第一に次の命題が根幹となっている.

Proposition 2.2 ([6], Proposition 3.1)**.** $p > 0,\ \beta > -1$ に対して, 次が成り立つ.

$$\mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x) = s^{\beta+\frac{2}{p}}p^{\beta+1}\Gamma^2(\frac{1}{p}) \frac{J_{\beta+1}^{[p]}(2\pi\sqrt[p]{s}x)}{(2\pi\sqrt[p]{s}|x|_p)^{\beta+1}} \qquad (s > 0,\ x \in \mathbb{R}^2).$$

これは $a > 0,\ \beta > -1$ とした $\mathbb{R}^2$ 上可積分な p-radial 関数

$$U_{\beta,a}^{[p]}(x) := \begin{cases} (a^p - |x|_p^p)^\beta & (x \in \mathbb{R}^2,\ |x|_p < a), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^2,\ |x|_p \geq a) \end{cases}$$

に対して, 一般化された零次 Hankel 変換 (2.2) を施し, Fourier 変換の諸性質から示される.

そして, Theorem 2.1 の証明におけるもう一つの重要なピースとして, 周期化級数展開

$$D_\beta^{[p]}(s:x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x-n) \tag{2.4}$$

が挙げられる. この展開は, 定理の仮定により, 可積分関数の周期化としてよく知られている次の補題を, 関数 $\mathcal{D}_\beta^{[p]}(1:x)$ に対して適用することで得られる.

Lemma 2.3 (Poisson の和公式: [11], Theorem 2.4)**.** $\mathbb{R}^d$ $(d\in\mathbb{N})$ 上可積分な関数 F に対して, 級数 $f(x):=\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}F(x+m)$ は $\mathbb{T}^d(:=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d)$ の L^1-norm で収束し $\mathbb{T}^d$ 上可積分であり, $\hat{F}(m)=\hat{f}(m)$, すなわち次が成り立つ.

$$f(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\hat{F}(m)e^{2\pi i x\cdot m}\quad(x\in\mathbb{T}^d).$$

よって, 以上の Proposition 2.2 と展開 (2.4) より, 以下のように目的の一般化等式が導かれる.

$$\begin{aligned}D_\beta^{[p]}(s:x)-\mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x-n)\\&=s^{\beta+\frac{2}{p}}p^{\beta+1}\Gamma^2(\frac{1}{p})\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\frac{J_{\beta+1}^{[p]}(2\pi\sqrt[p]{s}(x-n))}{(2\pi\sqrt[p]{s}|x-n|_p)^{\beta+1}}\quad(s>0,\ x\in\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

3 特殊関数の諸性質への帰着

主結果を含め, 前節までの議論は $p>0$ の場合として一般的に広く成り立つものであったが, 本節ではやや特別な場合に制限し, 特に後半は $\frac{2}{p}\in\mathbb{N}$ が奇数なる $0<p<1$ あるいは $p=2$ の場合について考えていきたい. なお, このような p に対応する閉曲線 p-circle を特に「astroid 型」と呼ぶことにする ($p=\frac{2}{3}$ の場合の閉曲線が astroid と呼称されるため).

この制限を行う理由の一つとして, $J_0^{[p]}$ に対する $\mathbb{R}^2$ 上 (広義) 一様漸近な評価を求める際に, 同関数の振動積分表示が必要になるのだが, $\frac{2}{p}$ が奇数の場合に導かれる振動積分表示 ([7], Proposition 2.1) が

$$J_0^{[p]}(x)=\frac{(\frac{2}{p})^2}{2\Gamma^2(\frac{1}{p})}\int_0^{2\pi}e^{i(x_1\sin^{\frac{2}{p}}\theta+x_2\cos^{\frac{2}{p}}\theta)}(\cos\theta\sin\theta)^{\frac{2}{p}-1}d\theta$$

のような形になり, $\frac{2}{p}$ が自然数全体の場合と比較してより自然な形になることが挙げられる.

我々は各 p の制限下において $J_0^{[p]}$ の (広義) 一様漸近な $\mathcal{O}$ 評価を既に求めており, x_1 および x_2 軸付近の振る舞いが p に依存することが以下の二つの結果から明らかである.

Theorem 3.1 ([7], Theorem 1.4; 遠方における $\mathbb{R}^2$ の象限上広義一様な漸近評価)**.**
$0<p\le 1$ または $p=2,\ x\ (:=(x_1,x_2))\in\mathbb{R}^2$ に対して, 符号関数 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ と歪角度 φ により

$$x_1=\mathrm{sgn}(\cos\varphi)|x|_p|\cos\varphi|^{\frac{2}{p}},\quad x_2=\mathrm{sgn}(\sin\varphi)|x|_p|\sin\varphi|^{\frac{2}{p}},\quad(0\le\varphi<2\pi)$$

と表示したとき, $\arg(x)(:=\varphi)\in(0,2\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\}$ について広義一様に次が成立する.

$$J_0^{[p]}(x)=\begin{cases}\mathcal{O}(|x|_p^{-\frac{1}{2}}) & (0<p<1,\ p=2),\\ \mathcal{O}(|x|_p^{-1}) & (p=1),\end{cases}\qquad(|x|_p\to\infty).$$

Theorem 3.2 ([7], Theorem 1.5; 遠方における $\mathbb{R}^2$ 上一様な漸近評価)**.**
$\frac{2}{p} \in \mathbb{N}$ なる p に対して, $\mathbb{R}^2$ 上一様に次が成立する.

$$J_0^{[p]}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(|x|_p^{-\frac{1}{2}}) & (p=2), \\ \mathcal{O}(|x|_p^{-\frac{p}{2}}) & (\frac{2}{p} \in \mathbb{N}_{\geq 2}), \end{cases} \qquad (|x|_p \to \infty).$$

なお, これらの結果は $J_\omega^{[2]}(x) = J_\omega(|x|)$ の関係から従来の Bessel 関数の漸近評価 ([12], p199(1))

$$J_\nu(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}) \qquad \left(\nu > -\frac{1}{2}\right) \tag{3.1}$$

の次数が 0 という特別な場合と矛盾しないことが分かる.

一方で, 次数が正の実数 ω である場合の $J_\omega^{[p]}$ に対する一様漸近な $\mathcal{O}$ 評価式が得られれば, Theorem 2.1 の仮定である「$\mathcal{D}_\beta^{[p]}(1:x)$ が $\mathbb{R}^2$ 上可積分」となるような β の具体的な範囲を特定できる.

すなわち, このことは, $\frac{2}{p} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ の場合を考えるとき (既知な $J_0^{[p]}$ の一様漸近評価式を含むような) 広い次数 $\omega \geq 0$ に対する $\mathbb{R}^2$ 上一様な評価式

$$J_\omega^{[p]}(x) = \mathcal{O}(|x|_p^{-q_\omega^{[p]}}) \qquad (|x|_p \overset{\text{unif}}{\to} \infty) \tag{3.2}$$

を満たす $q_\omega^{[p]} > 0$ (特に $q_0^{[p]} = \frac{p}{2}$) の下限 $Q^{[p]}$ を求めることに帰着できる (Bessel 関数の漸近評価 (3.1) のように指数が次数に非依存であるとは限らないことに注意せよ).

実際, $\beta > 1 - Q^{[p]}$ の下で, $\beta + 1 > 2 - Q^{[p]} + \varepsilon$ なる $\varepsilon > 0$ が存在し $|x|_p^{-(\beta+1)} < |x|_p^{-(2-Q^{[p]}+\varepsilon)}$ であるから, 次が成り立つ.

$$\frac{J_{\beta+1}^{[p]}(x)}{|x|_p^{\beta+1}} = \mathcal{O}(|x|_p^{-q_{\beta+1}^{[p]}-(2-Q^{[p]}+\varepsilon)}) = \mathcal{O}(|x|_p^{-(2+\varepsilon)}) = \mathcal{O}(|x|^{-(2+\varepsilon)}). \tag{3.3}$$

また, 簡単な計算により得られる級数展開 ([6], Proposition 2.6)

$$J_\omega^{[p]}(x) = \frac{(\frac{|x|_p}{p})^\omega (\frac{2}{p})^2}{\Gamma^2(\frac{1}{p})} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(\frac{2(k+1)}{p}+\omega)} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^2 \ |m|'=k} \frac{\Gamma(\frac{2m+1}{p})}{(2m)!} x^{2m} \qquad (\omega \geq 0) \tag{3.4}$$

(ただし, $|m|' := m_1 + m_2$, $x^{2m} := x_1^{2m_1} \cdot x_2^{2m_2}$ のように, 多重指数の表記による Γ や階乗を用いている) から, $x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega} &= \frac{4}{p^{\omega+2}\Gamma^2(\frac{1}{p})} \left(\frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p}+\omega)} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(\frac{2(k+1)}{p}+\omega)} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^2 \ |m|'=k} \frac{\Gamma(\frac{2m+1}{p})}{(2m)!} x^{2m} \right) \\ &\to \frac{4}{p^{\omega+2}\Gamma^2(\frac{1}{p})} \left(\frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p}+\omega)} + 0 \right) \qquad (x \to 0) \end{aligned}$$

より次のように原点での関数の値を再定義すれば, $\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega}$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続である.

$$\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega} := \frac{(\frac{2}{p})^2}{p^\omega \Gamma(\omega + \frac{2}{p})} \qquad (x = 0).$$

ゆえに, $\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega}$ における $\mathbb{R}^2$ 上の一様漸近評価式 (3.3) および連続性により, 原点中心の閉球 B と定数 C_B, $C'_B > 0$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega}\right|dx=\int_B\left|\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega}\right|dx+\int_{\mathbb{R}^2\setminus B}\left|\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega}\right|dx\le C_B+C'_B\int_{\mathbb{R}^2\setminus B}\frac{dx}{|x|^{2+\varepsilon}}<+\infty.$$

よって, このとき $\mathcal{D}_\beta^{[p]}(1:x)$ ($\simeq_{\beta,p}$ $\frac{J_{\beta+1}^{[p]}(2\pi x)}{|2\pi x|_p^{\beta+1}}$; Proposition 2.2) が $\mathbb{R}^2$ 上可積分であり, 主定理 (Theorem 2.1) の「astroid 型」版について, 仮定をより具体化させることができた.

Theorem 3.3 ([7], Theorem 3.1)**.** $\frac{2}{p}\in\mathbb{N}$ なる p に対して, $J_\omega^{[p]}(x)\overset{\text{unif}}{=}\mathcal{O}(|x|_p^{-q_\omega^{[p]}})$ を満たすような $Q^{[p]}:=\inf_{\omega\ge 0}q_\omega^{[p]}$ が存在するとき, $\beta>1-Q^{[p]}$ の下で, 次が成立する.

$$D_\beta^{[p]}(s:x)-\mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x)=s^{\beta+\frac{2}{p}}p^{\beta+1}\Gamma^2(\frac{1}{p})\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\frac{J_{\beta+1}^{[p]}(2\pi\sqrt[p]{s}(x-n))}{(2\pi\sqrt[p]{s}|x-n|_p)^{\beta+1}}\qquad(s>0,\ x\in\mathbb{R}^2).$$

以上より, 導入で記したように, 倉坪氏と中井氏の手法に倣い我々の研究目的を達成させるには, 正の実数次数 ω に対する $J_\omega^{[p]}$ の一様漸近評価式を (更に, のちのことを考慮すると主要項の係数も) 求める必要がある. 一方, J_ν と異なり $J_\omega^{[p]}$ が二変数関数であることから, この形の状態で H. Hankel[4] による複素解析を介した J_ν の漸近展開の導出法に沿うことは困難である.

そこで, 級数展開 (3.4) をもとに, $x=(\mathrm{sgn}(\cos\varphi)r|\cos\varphi|^{\frac{2}{p}},\mathrm{sgn}(\sin\varphi)r|\sin\varphi|^{\frac{2}{p}})$ $(0\le\varphi<2\pi, r>0)$ により, 歪角度 φ を固定することで, r についての一変数関数として考える. すなわち,

$$J_\omega^{[p]}(x)=:\mathcal{J}_{\omega,\varphi}^{[p]}(r)=\frac{(\frac{2}{p})^2}{\Gamma^2(\frac{1}{p})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{2k}(-1)^k}{\Gamma(\frac{2}{p}(k+1)+\omega)}\Big(\frac{r}{p}\Big)^{2k+\omega}\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}_0^2\ |m|'=k}\frac{\Gamma(\frac{2m+1}{p})}{(2m)!}|\cos^{m_1}\varphi\sin^{m_2}\varphi|^{\frac{4}{p}}\Big),$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{N}_0^2\ |m|'=k}\frac{\Gamma(\frac{2m+1}{p})}{(2m)!}|\cos^{m_1}\varphi\sin^{m_2}\varphi|^{\frac{4}{p}}\\
&=\sum_{n=0}^{k}\frac{\Gamma(\frac{1}{p}(2n+1))\Gamma(\frac{1}{p}(2(k-n)+1))}{(2n)!(2(k-n))!}(\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}\\
&=\sum_{n=0}^{k}\frac{\pi\Gamma(\frac{1}{p}(2n+1))\Gamma(\frac{1}{p}(2(k-n)+1))}{n!\ 2^{2n}\Gamma(n+\frac{1}{2})\cdot(k-n)!\ 2^{2(k-n)}\Gamma(k-n+\frac{1}{2})}(\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}\\
&=\frac{\pi}{2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!\ (k-n)!}\Big(\frac{\Gamma(\frac{2}{p}(n+\frac{1}{2}))\Gamma(\frac{2}{p}(k-n+\frac{1}{2}))}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(k-n+\frac{1}{2})}\Big)(\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}\\
&=\frac{\pi}{k!\ 2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{(\frac{2}{p}(k+1)-1)!}{n!\ (k-n)!}\Big(\frac{B(\frac{2}{p}(n+\frac{1}{2}),\frac{2}{p}(k-n+\frac{1}{2}))}{B(n+\frac{1}{2},k-n+\frac{1}{2})}\Big)(\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}\\
&=:\frac{\pi}{k!\ 2^{2k}}\Phi_{k,\varphi}^{[p]}
\end{aligned}$$

と表す (ただし, $B(s,t)$ は beta 関数である).

特に $\frac{2}{p}$ が奇数 ($\frac{2}{p}-1$ が偶数) となるような p に対して, beta 関数の公式

$$B\Big(l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\Big)=\frac{\pi(2l-1)!!\ (2m-1)!!}{(2l+2m)!!}\qquad(l,m\in\mathbb{N}_{\ge 0})$$

を用いると

$$\begin{aligned}\frac{B(\frac{2}{p}(n+\frac{1}{2}),\frac{2}{p}(k-n+\frac{1}{2}))}{B(n+\frac{1}{2},k-n+\frac{1}{2})} &= \frac{B(\frac{2}{p}n+\frac{\frac{2}{p}-1}{2}+\frac{1}{2},\frac{2}{p}(k-n)+\frac{\frac{2}{p}-1}{2}+\frac{1}{2})}{B(n+\frac{1}{2},(k-n)+\frac{1}{2})} \\ &= \frac{\pi(\frac{2}{p}(2n+1)-2)!!\ (\frac{2}{p}(2(k-n)+1)-2)!!}{(\frac{2}{p}(2k+2)-2)!!}\cdot\frac{(2k)!!}{\pi(2n-1)!!\ (2(k-n)-1)!!} \\ &= \frac{(\frac{2}{p}(2n+1)-2)!!\ (\frac{2}{p}(2(k-n)+1)-2)!!}{(2n-1)!!\ (2(k-n)-1)!!}\cdot\frac{2^k k!}{2^{\frac{2}{p}(k+1)-1}(\frac{2}{p}(k+1)-1)!}\end{aligned}$$

と記せるので

$$\begin{aligned}\Phi_{k,\varphi}^{[p]} &= \sum_{n=0}^{k}\frac{(\frac{2}{p}(k+1)-1)!}{n!\ (k-n)!}\Big(\frac{(\frac{2}{p}(2n+1)-2)!!\ (\frac{2}{p}(2(k-n)+1)-2)!!}{(2n-1)!!\ (2(k-n)-1)!!}\Big)\cdot\frac{k!\ (\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}}{2^{\frac{2}{p}(k+1)-(k+1)}(\frac{2}{p}(k+1)-1)!} \\ &= \frac{1}{2^{(\frac{2}{p}-1)(k+1)}}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\frac{(\frac{2}{p}(2n+1)-2)!!\ (\frac{2}{p}(2(k-n)+1)-2)!!}{(2n-1)!!\ (2(k-n)-1)!!}(\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}\end{aligned} \tag{3.5}$$

すなわち

$$\mathcal{J}_{\omega,\varphi}^{[p]}(r) = \frac{(\frac{2}{p})^2}{\Gamma^2(\frac{1}{p})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{2k}(-1)^k}{\Gamma(\frac{2}{p}(k+1)+\omega)}\Big(\frac{r}{p}\Big)^{2k+\omega}\frac{\pi}{k!\ 2^{2k}}\Phi_{k,\varphi}^{[p]} \tag{3.6}$$

と表せる．よって, 我々はこの歪角度固定一般化 Bessel 関数 (3.6) を複素数域まで拡張することで, 先に記した Hankel による漸近展開の導出を考えている．

また, 我々の研究方針において必要とされる Bessel 関数の諸性質の対応物は他にも予想され, 例えば Bessel 関数の微分公式 $\frac{d}{dr}(\frac{J_\omega(r)}{r^\omega}) = -\frac{J_{\omega+1}}{r^\omega}$ の対応物が考えられる．これは, (3.5) と (3.6) から

$$\frac{d}{dr}\frac{\mathcal{J}_{\omega,\varphi}^{[p]}(r)}{r^\omega} = -\frac{1}{r^{\omega+\frac{2}{p}-1}}\Big(\frac{(\frac{2}{p})^2}{\Gamma^2(\frac{1}{p})}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{p^{2l}(-1)^l}{\Gamma(\frac{2}{p}(l+1)+\omega+\frac{2}{p})}\Big(\frac{r}{p}\Big)^{2l+\omega+\frac{2}{p}}\frac{\pi}{l!\ 2^{2l}}\cdot\frac{p^{\frac{2}{p}}}{2}\Phi_{l+1,\varphi}^{[p]}\Big)$$

として式変形でき, これより仮に定数 $C_\varphi^{[p]}$ が存在して

$$\frac{p^{\frac{2}{p}}}{2}\Phi_{l+1,\varphi}^{[p]} = C_\varphi^{[p]}\Phi_{l,\varphi}^{[p]} \tag{3.7}$$

が成り立てば, 次の微分公式が得られることになる．

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{\mathcal{J}_{\omega,\varphi}^{[p]}(r)}{r^\omega}\Big) = -C_\varphi^{[p]}\frac{\mathcal{J}_{\omega+\frac{2}{p},\varphi}^{[p]}(r)}{r^{\omega+\frac{2}{p}-1}} \tag{3.8}$$

ゆえに, 本稿で掲げた我々の数論的問題の研究対象に, 特殊関数論分野との深い繋がりを見出せる．

参考文献

[1] J. Bourgain & N. Watt, Mean square of zeta function, circle problem and divisor problem revisited, arXiv:1709.04340v1 (2017).

[2] J.D. Gaskill, Linear systems, Fourier transforms, and optics, Wiley. 1978.

[3] C.F. Gauss, De nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem. In: Schering, E., ed., Werke, Vol. 2. Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften (1876) 269-291.

[4] H. Hankel, Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art, Math. Ann. 1 (1869) 467-501.

[5] G.H. Hardy, E.Landau, The average order of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, Proc. Lond. Math. Soc. 15 (1917) 192-213.

[6] M. Kitajima, Series expansions by generalized Bessel functions for certain functions related to the lattice point problems for the p-circle, arXiv:2408.02613v1 (2024).

[7] M. Kitajima, Asymptotic evaluations of generalized Bessel function of order zero related to the p-circle lattice point problem, arXiv:2411.10850v1 (2024).

[8] E. Krätzel, Lattice Points, Kluwer Academic Publication, 1988.

[9] G. Kuba, On sums of two k-th powers of numbers in residue classes II, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 63 (1993) 87-95.

[10] S. Kuratsubo & E. Nakai, Multiple Fourier series and lattice point problems, J. Func. Anal. 282 (2022) 1-62.

[11] E.M. Stein & G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, 1971.

[12] G.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1995.